



University of HUDDERSFIELD

University of Huddersfield Repository

Kollar, László E., Somlo, J. and Stepan, G.

Szabályozott egyensúlyozási rendszer periodikus megoldásai [Periodic Responses of a Controlled Balancing System]

Original Citation

Kollar, László E., Somlo, J. and Stepan, G. (2000) Szabályozott egyensúlyozási rendszer periodikus megoldásai [Periodic Responses of a Controlled Balancing System]. *Gépgyártástechnológia*, (10). ISSN 0016-8580

This version is available at <http://eprints.hud.ac.uk/id/eprint/16095/>

The University Repository is a digital collection of the research output of the University, available on Open Access. Copyright and Moral Rights for the items on this site are retained by the individual author and/or other copyright owners. Users may access full items free of charge; copies of full text items generally can be reproduced, displayed or performed and given to third parties in any format or medium for personal research or study, educational or not-for-profit purposes without prior permission or charge, provided:

- The authors, title and full bibliographic details is credited in any copy;
- A hyperlink and/or URL is included for the original metadata page; and
- The content is not changed in any way.

For more information, including our policy and submission procedure, please contact the Repository Team at: E.mailbox@hud.ac.uk.

<http://eprints.hud.ac.uk/>

SZABÁLYOZOTT EGYENSÚLYOZÁSI RENDSZER PERIODIKUS MEGOLDÁSAI

Kollár L. E.*; Somló J.†; Stépán G.‡

Összefoglalás

Egy korábban megalkotott inverz inga-kocsi modell lineáris stabilitásvizsgálatát röviden összefoglaltuk. A hajtásnál megjelenő kotyogást nemlineáris rugókarakterisztikaként vettük figyelembe. Ez szakaszonként lineáris rendszerhez vezet és a rúd felső egyensúlyi helyzete körüli rezgését okozza. A periodikus megoldásokat harmonikus linearizálással kerestük, azok amplitudóját és frekvenciáját meghatároztuk a szabályozási paraméterek függvényében. A felharmonikusok hatását is megvizsgáltuk. Az eredményeket összehasonlítottuk a korábban kapottakkal és meghatároztunk egy paramétertartományt, ahol ez a módszer megbízhatóan alkalmazható.

1. Bevezetés

Szakaszonként lineáris tagokat tartalmazó dinamikai rendszerek gyakoriak a gépipari gyakorlatban. Fogaskerékpárok kotyogással, ütközéscsillapítók, mozgó gépszerkezetek szárazsúrlódással, szomszédos épületek földrengés közben szakaszonként lineáris merevséget, csillapítást vagy kompenzáló erőt tartalmazó rendszerrel modellezhetők. A gyengén nemlineáris egyenleteknél alkalmazható analitikus módszerek a mozgásegyenletek erősen nemlineáris jellege miatt ezekben az esetekben nem használhatók, de léteznek a periodikus megoldások meghatározására alkalmas

analitikus módszerek [5]-[8].

Ilyen rendszerek szabályozásának tipikus esete a mechanikai rendszerek instabil egyensúlyi helyzeteinek a stabilizálása. Ez az eset a fent említetteken kívül számos más gépipari feladatban is előfordul. Így vizsgálatának mind oktatási, mind kutatási fontossága van. Ez a probléma merül fel a kocsihoz helyezett rúd egyensúlyozásánál is, ahol a kocsi egy motor hajtja egy fogasszíjon keresztül. A rúd függőleges egyensúlyi helyzete instabil, a hajtásnál jelentkező kotyogás következtében pedig a leíró rendszer szakaszonként lineáris. A kotyogás nélküli rendszer stabilitásvizsgálata és a szabályozási paraméterek síkján megszerkesztett stabilitási térkép [11]-ben megtalálható. A kotyogás figyelembevételével periodikus megoldások jelennek meg abban a paramétertartományban, ahol a kotyogás nélküli esetben a Routh-Hurwitz kritériummal stabil pontok határozhatóak meg. A továbbiak a periodikus megoldások meghatározását tárgyalják harmonikus linearizálással [5], majd az eredményeket összehasonlítjuk a "continuation" módszer [14] alkalmazásával korábban kapott eredményekkel [12]-[13].

2. Az inverz inga-kocsi modell

A korábban említett egyensúlyozási rendszer az 1. ábrán látható [10]-[13]. A rendszer 2 szabadsági fokú, általános koordináták az inga φ szöge és a hajtósíj $\Delta = r_m\psi - \frac{r_w}{R_w}x$ megnyúlása, ahol r_m [m] a motortengely sugara, r_w [m] és R_w [m] a hajtott kerék sugarai, ψ a motortengely szöge, és x [m] a kocsi vízszintes irányú elmozdulása. A szabályozási rendszer a kocsi

*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék

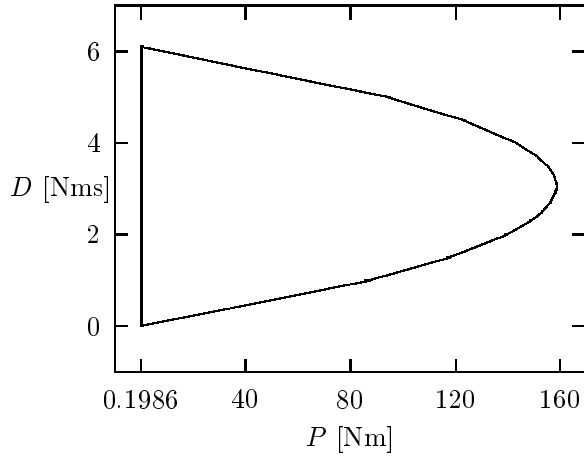
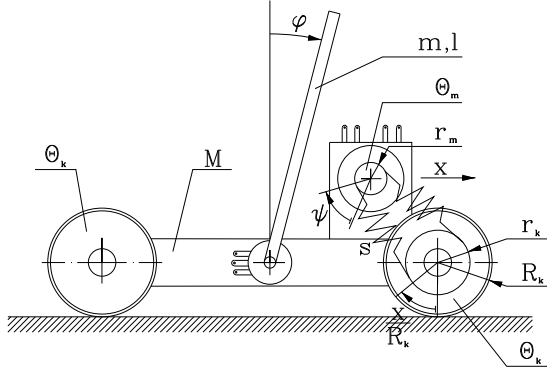
†Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépgyártástechnológia Tanszék

‡Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék

\dot{x} sebességét, valamint az inga φ szögelfordulását és annak deriváltját méri. A motor K csillapítása a kocsi mozgásának differenciális erősítésével eliminálható, így a szabályozó erő az alábbi alakúra egyszerűsödik

$$Q = P\varphi + D\dot{\varphi}, \quad (1)$$

ahol P és D a PD-szabályozó együtthatói.



1. ábra Az inverz inga-kocsi modell és a stabilitási térkép

A linearizált mozgásegyenlet-rendszer a következő alakban írható fel

$$\begin{pmatrix} \frac{(m+M)m_m r_m}{2} & -\frac{mm_m l r_m r_w}{4R_w} \\ 0 & \frac{ml^2}{3} - \frac{m^2 l^2}{4(m+M)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\Delta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m+M)\frac{K}{r_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Delta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mgl}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m+M)r_m + \frac{m_m r_m r_w^2}{2R_w^2} \\ \frac{mlr_w}{2(m+M)R_w} \end{pmatrix} R_s = \begin{pmatrix} (m+M)Q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ahol $R_s = s\Delta$ a rugalmas szíjban ébredő erő, s [N/m] a rugómerevség, m [kg] és m_m [kg] az inga és a motor tömege, M [kg] a kocsi és a motor tömegének, valamint a kerekek inerciájából redukált tömegnek az összege, l [m] az inga hossza és g [m/s²] a nehézségi gyorsulás.

A rendszer stabilitásvizsgálata megoldható a Routh-Hurwitz kritérium alkalmazásával [11]. (2) triviális megoldása aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha

$$P > P_0 = \left(m + M + \frac{1}{2} m_m \frac{r_w^2}{R_w^2} \right) g \frac{r_m R_w}{r_w}, \quad H_2 > 0, \quad (3)$$

ahol H_2 a maximális méretű Hurwitz-determináns. A stabilitási térkép megrajzolható, ahogy az az 1. ábrán látható.

3. A harmonikus linearizálás alkalmazása

A kotyogás a hajtósíj és a motortengely kapcsolatánál jelenik meg. A síj nem közvetíti a szabályozó erőt a kotyogás kis tartományában, vagyis a rugókarakterisztika nemlineáris. A síjban ébredő erő a Δ megnyúlás függvénye

$$R_s = \begin{cases} s(\Delta + f) & \Delta \leq -f \\ 0 & |\Delta| < f \\ s(\Delta - f) & \Delta \geq f \end{cases}, \quad (4)$$

ahol f a kotyogás értéke. Ez a függvény a 2(a) ábrán látható.

A továbbiakban a harmonikus linearizálást alkalmazzuk szakaszonként lineáris rendszerekre, ahogy azt [5] ajánlja. Bontsuk fel a fenti függvényt lineáris és telítettségi görbékre [5]! A karakterisztika szimmetrikus, ezért elég a pozitív megnyúlás tartományában felírni

$$R_s = s\Delta - \begin{cases} s\Delta & \Delta < f \\ sf & \Delta \geq f \end{cases}, \quad (5)$$

ahogy az a 2(b) ábrán adott. Periodikus megoldásokat keresünk, így a megnyúlást $\Delta = B \sin(\omega t)$ alakban feltételezzük és

mivel a karakterisztika egyértékű és szimmetrikus, a szíjban ébredő erő az alábbi alakúra egyszerűsödik

$$R_s = b\Delta + r_3 B \sin(3\omega t) + r_5 B \sin(5\omega t) + \dots, \quad (6)$$

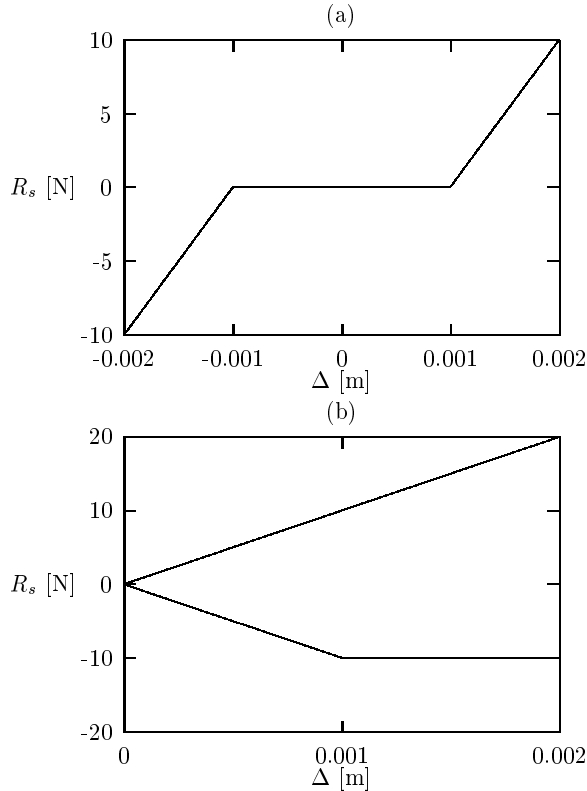
ahol

$$b = s \left(1 - k \left(\frac{B}{f} \right) \right), \quad k \left(\frac{B}{f} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{f}{B} + \frac{f}{B} \sqrt{1 - \frac{f^2}{B^2}} \right), \quad (7)$$

$$r_3 = -s\kappa_{11} \left(\frac{B}{f} \right), \quad r_5 = -s\kappa_{12} \left(\frac{B}{f} \right), \quad \dots \quad (8)$$

$$\kappa_{1m} \left(\frac{B}{f} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(2m\varphi_1)}{m} - \frac{\sin(2(m+1)\varphi_1)}{m+1} + \frac{4}{2m+1} \sin\varphi_1 \cos(2(m+1)\varphi_1) \right)$$

$$m = 1, 2, \dots \quad \varphi_1 = \arcsin \left(\frac{f}{B} \right). \quad (9)$$



2. ábra (a) A rugó karakterisztika és (b) felbontása

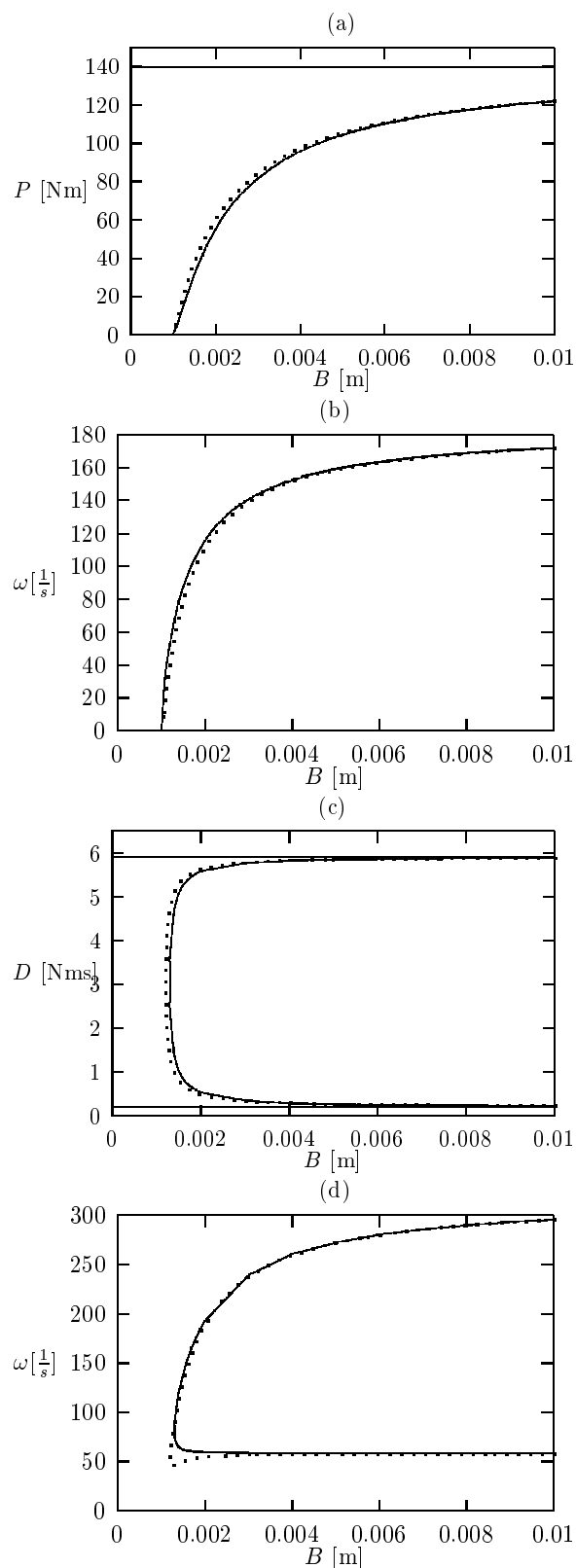
Első lépésben a felharmonikusok elhanyagolásával $R_s = b\Delta$ helyettesítés alkalmazható a (2) egyenletben. Periodikus megoldás akkor jelenik meg, ha a karakterisztikus egyenletnek van tisztán képzetes gyökpárja. Legyen λ a karakterisztikus gyök. A karakterisztikus egyenletben $\lambda = i\omega$ helyettesítéssel élve, majd a valós és a képzetes részt szétválasztva, 2 egyenlet kapható. A rendszert jellemző paraméterek és (7) behelyettesítésével az egyenletek 4 ismeretlent tartalmaznak, a rezgés B amplitudóját és ω szögfrekvenciáját, valamint a P és D szabályozási paramétereket. Ha az egyik szabályozási paraméter rögzített, akkor a rezgés szögfrekvenciája és a másik szabályozási paraméter megkapható a rezgés amplitudójának a függvényében. Így a periodikus megoldás amplitudója és frekvenciája meghatározható minden olyan szabályozási paraméterpárra, amelyre periodikus megoldás létezik.

4. A kapott eredmények

A számításokat egy [13]-ban adott, megvalósítható inga-kocsi rendszert jellemző paraméterekkel végeztük el (ld. Függelék). A folytonos görbék a 3(a) és 3(b) ábrán a proporcionális erősítést, ill. a szögfrekvenciát mutatják az amplitudó függvényében, ha a differenciális erősítés rögzített, $D = 2$ [Nms]. A legkisebb amplitudójú periodikus megoldás $B = 1.0087$ [mm]-re kapható, szögfrekvenciája $\omega = 0.0705$ [1/s], az ehhez tartozó proporcionális erősítés pedig $P = 0.1986$ [Nm], ami a (3) egyenletben meghatározott P_0 . Az 1. ábrán látható stabilitási tartományt határoló egyenes ennél az értéknél kapható meg. A 3(a) ábrán mutatott egyenes a $D = 2$ [Nms] esetén a stabilitási tartományt határoló parabola P koordinátájánál látható.

A folytonos görbék a 3(c) és a 3(d) ábrán a differenciális erősítést és a szögfrekvenciát mutatják az amplitudó függvényében, ha a proporcionális erősítés rögzített, $P = 20$ [Nm]. A 3(c) ábrán hú-

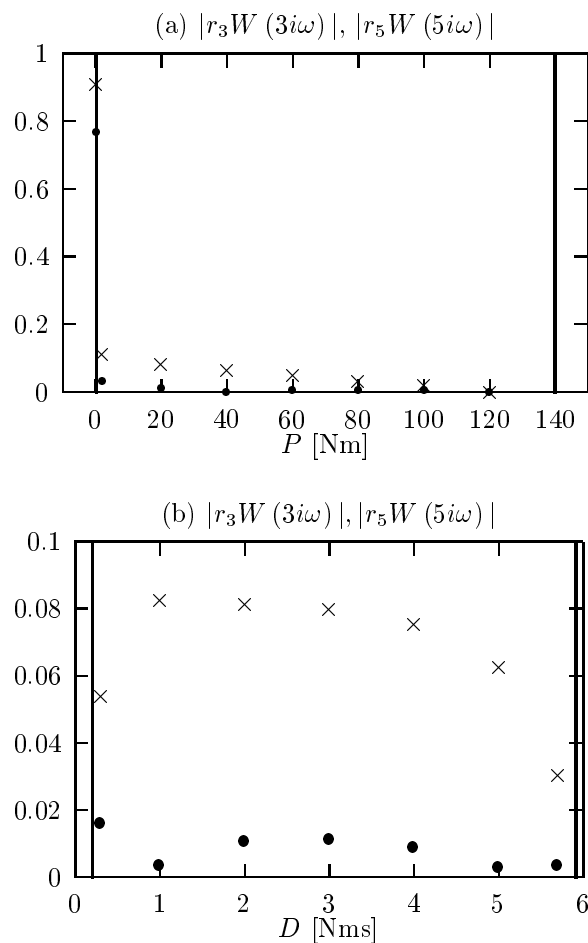
zott egyenesek a $P = 20$ [Nm] esetén a stabilitási tartományt határoló parabola D koordinátáinál láthatók.



3. ábra (a) $P - B$ összefüggés és
 (b) $\omega - B$ összefüggés $D = 2$ [Nms]-ra,
 (c) $D - B$ összefüggés és
 (d) $\omega - B$ összefüggés $P = 20$ [Nm]-re

A 3. ábrán a pontozott vonallal jelölt görbék a "continuation" módszerrel kapott eredmények [12]. A két módszerrel kapott eredmények elég jól egyeznek, eltekintve egy a stabilitási tartományt P_0 -nál határoló egyenes melletti kis tartománytól, ahol a "continuation" módszer szerint a periodikus megoldás nem létezik.

A felharmonikusok hatását szintén megvizsgáltuk. Az alapharmonikus b együtthatója, valamint az első és a második felharmonikus r_3 és r_5 együtthatója a (7)-(9) egyenletekből megkapható az amplitudó függvényeként. Összehasonlítandó a b, r_3 ill. r_5 együtthatóknak a $W(\lambda)$ átviteli függvénnyel az $i\omega, 3i\omega$ ill. $5i\omega$ helyen vett értékével képzett szorzata. Ha $|r_3 W(3i\omega)| \ll |b W(i\omega)|$ és $|r_5 W(5i\omega)| \ll |b W(i\omega)|$, akkor a felharmonikusok elhanyagolhatók.



4. ábra $|r_3 W(3i\omega)|$ (keresztek) és $|r_5 W(5i\omega)|$ (pontok)
 (a) $D = 2$ [Nms],
 (b) $P = 20$ [Nm]

A rugókarakterisztika hatását vizsgáljuk, így az átviteli függvény bemenete a megnyúlás, kimenete a rugóerő

$$W(\lambda) = -\frac{x_{in}}{x_{out}} = -\frac{1}{b}. \quad (10)$$

A 4. ábra a felharmonikusok és az átviteli függvény szorzatát mutatja, pontosabban ennek, valamint az alapharmonikus átviteli függvénnyel képzett szorzatának a hányadosát. Az alapharmonikus és az átviteli függvény szorzata viszont 1, ahogy az a (10) egyenletből következik.

A stabilitási tartományt P_0 -nál határoló egyeneshez közeli P értékek esetén a felharmonikusok nem hanyagolhatók el, de P növelésével $|r_3W(3i\omega)|$ és $|r_5W(5i\omega)|$ lecsökken $|bW(i\omega)|$ 10%-a alá. $|r_3W(3i\omega)|$ -nek D -től függően van egy maximuma, de még ez a maximum sem éri el az 0.1-et, kivéve P_0 -hoz közeli P értékek esetén. r_5 megváltoztatja az előjelét egy bizonyos B értéknél, így $|r_5W(5i\omega)|$ -nek két maximuma van.

5. Következtetések

A harmonikus linearizálással kapott eredmények jól egyeznek a [12]-[13]-ban közölt eredményekkel a stabilitási tartomány nagy részében. P_0 -hoz közeli P értékek esetén azonban eltérések tapasztalhatók. A [12]-ben közöltek szerint a periodikus megoldás egy homoklinikus bifurkációnál jelenik meg és stabil fix pontok vannak P_0 és a homoklinikus bifurkáció közti keskeny tartományban, míg a harmonikus linearizálással kapott periodikus megoldás az egész stabilitási tartományban található.

A felharmonikusok elhanyagolása problémát okoz P_0 -hoz közeli P értékek esetén. A harmonikus linearizálás nem ad megbízható eredményeket itt, de ettől a kis tartománytól eltekintve ez a módszer alkalmas a periodikus megoldások tulajdonságainak a meghatározására. Így megállapítható, hogy a harmonikus linearizálás jól alkalmazható számos gépipari jelenség vizsgálatakor és a méretezési, behangolási problémák megoldásakor.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az Országos Tudományos Kutatási Alapnak és az Oktatási Minisztériumnak a kutatás elvégzéséhez nyújtott támogatásért (OTKA T030762, OTKA T026407, FKFP 0380/97).

Hivatkozások

- [1] Shaw, S. W., Holmes, P. J., A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, **90**(1), pp. 129-155, 1983.
- [2] Hogan, S. J., On the dynamics of rigid block motion under harmonic forcing, *Proc. R. Soc. Lond. A* **425** pp. 441-476, 1989.
- [3] Hogan, S. J., The many steady state responses of a rigid block under harmonic forcing, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 1057-1071, 1990.
- [4] Leine, R. I., van Campen, D. H., Fold Bifurcations in Discontinuous Systems, *Proc. of DETC'99, 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas, 1999.
- [5] Somló, J., Cat, P. T., *Lineáris és nemlineáris szabályozási rendszerek számítógépes tervezése, Computer Design of Linear and Nonlinear Control Systems (in Hungarian)*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.
- [6] Natsiavas, S., On the dynamics of oscillators with bi-linear damping and stiffness, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **25** pp. 535-554, 1990.
- [7] Natsiavas, S., Dynamics of multiple-degree-of-freedom oscillators with colliding components, *Journal of Sound and Vibration*, **165**(3) pp. 439-453, 1993.
- [8] Lóránt, G., Stépán, G., The Role of Non-Linearities in the Dynamics of a Single Railway Wheelset, *Machine Vibration* **5** pp. 18-26, 1996.

- [9] Kawazoe, Y., Manual control and computer control of an inverted pendulum on a cart, *Proc. 1st Int. Conf. on Motion and Vibration Control*, pp. 930-935, Yokohama, 1992.
- [10] Enikov, E., Stépán, G., Micro-Chaotic Motion of Digitally Controlled Machines, *J. of Vibration and Control*, accepted in 1997.
- [11] Kollár, L. E., Backlash in Machines Stabilized by Control Force, *Proc. of First Conference on Mechanical Engineering*, Vol. 1, pp. 147-151, Budapest, 1998.
- [12] Kollár, L. E., Stépán, G., Hogan, S. J., Sampling Delay and Backlash in Balancing Systems, *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.*, Vol. 44, No. 1, pp. 77-84, 2000.
- [13] Kollár, L. E., Stépán, G., Hogan, S. J., Backlash in Balancing Systems Using Approximate Spring Characteristics, *Proc. of 3rd European Nonlinear Oscillations Conference* (<http://serv1.imm.dtu.dk/documents/users/mps/ENOC/proceedings/Kollar/>), 2000.
- [14] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, Jon Wiley & Sons, New York, 1995.

Függelék

A számításokat a paraméterek alábbi értékei mellett végeztük el:

$$m = 0.169 \text{ [kg]}$$

$$M = 1.136 \text{ [kg]}$$

$$m_m = 0.2 \text{ [kg]}$$

$$g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$l = 0.5 \text{ [m]}$$

$$K = 0.01 \text{ [Nms]}$$

$$r_w = 0.02 \text{ [m]}$$

$$R_w = 0.03 \text{ [m]}$$

$$r_m = 0.01 \text{ [m]}$$

$$s = 10000 \text{ [N/m]}$$

$$f = 0.001 \text{ [m]}$$